$$(\sigma^2-\delta^2)\,(\vec{\xi}^{\,2}-\vec{\bar{\xi}}^{\,2})=0.$$

Отсюда либо $|\vec{\xi}|=|\vec{\bar{\xi}}|$, либо $|\sigma|=|\delta|$. Но $|\vec{\xi}|=|\vec{\bar{\xi}}|$ тогда и только тогда, когда интегральные линии поля $\vec{\xi}$-прямые, т.е. $\vec{\xi}=\vec{\bar{\xi}}$, а значит $\vec{\xi}$ и $\vec{\bar{\xi}}$ не определяют двумерного распределения на поверхности. Таким образом, в рассматриваемом случае $|\vec{\ell}|=|\vec{\bar{\ell}}|$ тогда и только тогда, когда $|\sigma|=|\delta|$.

УДК 514.75

К ГЕОМЕТРИИ ДИФФЕОМОРФНЫХ n-ПОВЕРХНОСТЕЙ В E_{2n}

М.А.Чешкова

(Алтайский государственный университет)

В евклидовом пространстве E_{2n} изучаются связности, ассоциированные с парой диффеоморфных n-поверхностей.

Пусть M, M' – гладкие n-поверхности в E_{2n}, $f: M\to M'$ – диффеоморфизм, $p\in M$, $q=f(p)\in M'$. Перенесем векторы $(dfX)_q$, где $X_p\in T_pM$, параллельно в точку $p=f^{-1}(q)$ и разложим на касательные и нормальные составляющие. Таким образом, имеем

$$dfX=FX+\omega X,$$

где

$$(FX)_p\in T_p(M),\quad (\omega X)_p\in T_p^{\perp}M,\quad X\in TM$$

Если

$$\operatorname{rang} F_p=n,\quad \operatorname{rang}\omega_p=n,\quad \forall p\in M,$$

то на M определятся связности

$$\overset{F}{\nabla}_X Y=F^{-1}\nabla^0_X FY,\quad \overset{\omega}{\nabla}_X Y=\omega^{-1}\nabla^{\perp}_X\omega Y, \tag{I}$$

где ∇^0 – связность Леви-Чивита, $\nabla^{\perp}$ – нормальная связность [1] поверхности M.

На поверхности M определим метрики

$$\overset{F}{g}(X,Y)=g(FX,FY),$$
$$\overset{\omega}{g}(X,Y)=g^{\perp}(\omega X,\omega Y),$$
$$\tilde{g}=\overset{F}{g}+\overset{\omega}{g},$$

где g, $g^{\perp}$ – метрики, индуцированные на M метрикой G пространства E_{2n}. Очевидно,

$$\tilde{g}(X,Y)=G(dfX,dfY).$$

Т е о р е м а 1. Связность $\overset{F}{\nabla}$ согласована с метрикой $\overset{F}{g}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. $(\overset{F}{\nabla}_Z\overset{F}{g})(X,Y)=Z\overset{F}{g}(X,Y)-$

$$-\overset{F}{g}(\overset{F}{\nabla}_Z X,Y)-\overset{F}{g}(X,\overset{F}{\nabla}_Z Y)=g(\nabla^0_Z FX,FY)+g(FX,\nabla^0_Z FY)-g(F\overset{F}{\nabla}_Z X,FY)-$$
$$-g(FX,F\overset{F}{\nabla}_Z Y)=0$$

в силу (I).

Поле F называется полем Кодацци (в связности ∇^0) [2], если

$$(\nabla^0_X F)(Y)=(\nabla^0_Y F)(X).$$

Так как тензор кручения

$$\overset{F}{T}(X,Y)=\overset{F}{\nabla}_X Y-\overset{F}{\nabla}_Y X-[X,Y]$$

связности $\overset{F}{\nabla}$ имеет вид

$$\overset{F}{T}(X,Y)=F^{-1}\big((\nabla^0_X F)(Y)-(\nabla^0_Y F)(X)\big),$$

то получим

С л е д с т в и е 1. Следующие утверждения эквивалентны: 1) F – поле Кодацци в связности ∇^0; 2) $\overset{F}{\nabla}$ – связность Леви-Чивита, определяемая метрикой $\overset{F}{g}$.

Аналогично доказывается

Т е о р е м а 2. Связность $\overset{\omega}{\nabla}$ согласована с метрикой $\overset{\omega}{g}$.

Рассмотрим ковариантную производную ω в связности $\nabla^0\oplus\nabla^{\perp}$

$$(\mathcal{D}_X\omega)(Y)=\nabla^{\perp}_X\omega Y-\omega(\nabla^0_X Y).$$

Дадим следующее

О п р е д е л е н и е. Поле ω называется полем Кодацци в связности $\nabla^0\oplus\nabla^{\perp}$, если $(\mathcal{D}_X\omega)(Y)=(\mathcal{D}_Y\omega)(X)$.

Так как тензор кручения $\overset{\omega}{T}$ связности $\overset{\omega}{\nabla}$ имеет вид

$$\overset{\omega}{T}(X,Y)=\omega^{-1}\big((\mathcal{D}_X\omega)(Y)-(\mathcal{D}_Y\omega)(X)\big),$$

то получим

С л е д с т в и е 2. Следующие утверждения эквивалентны: 1) ω – поле Кодацци в связности $\nabla^0\oplus\nabla^{\perp}$; 2) $\overset{\omega}{\nabla}$ – связность Леви-Чивита, определяемая метрикой $\overset{\omega}{g}$.

Рассмотрим среднюю связность $\overset{c}{\nabla}=\frac{1}{2}(\overset{F}{\nabla}+\overset{\omega}{\nabla})$.

Т е о р е м а 3. Имеет место равенство

$$2(\overset{c}{\nabla}_Z \tilde{g})(X,Y) = \bar{g}(Q(Z,X),Y) + \bar{g}(X,Q(Z,Y)), \qquad (2)$$

где

$$Q(Z,X) = \overset{F}{\nabla}_Z X - \overset{\omega}{\nabla}_Z X, \quad \bar{g} = \overset{F}{g} - \overset{\omega}{g}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. $\tilde{g} = \overset{F}{g} + \overset{\omega}{g}$,

$$(\overset{c}{\nabla}_Z \tilde{g})(X,Y) = \tfrac{1}{2}(\overset{\omega}{\nabla}_Z \overset{F}{g})(X,Y) + \tfrac{1}{2}(\overset{F}{\nabla}_Z \overset{\omega}{g})(X,Y),$$

$$(\overset{\omega}{\nabla}_Z \overset{F}{g})(X,Y) = Zg(FX,FY) - g(F\overset{\omega}{\nabla}_Z X, FY) - g(FX, F\overset{\omega}{\nabla}_Z Y) =$$

$$= g(\overset{\circ}{\nabla}_Z FX - F\omega^{-1}\nabla^1_Z \omega X, FY) + g(FX, \overset{\circ}{\nabla}_Z FY - F\omega^{-1}\nabla^1_Z \omega Y).$$

Так как

$$\overset{\circ}{\nabla}_Z FX - F\omega^{-1}\nabla^1_Z \omega X = FQ(Z,X),$$

получим

$$(\overset{\omega}{\nabla}_Z \overset{F}{g})(X,Y) = \overset{F}{g}(Q(Z,X),Y) + \overset{F}{g}(X,Q(Z,Y)).$$

Аналогично находим

$$(\overset{F}{\nabla}_Z \overset{\omega}{g})(X,Y) = -\overset{\omega}{g}(Q(Z,X),Y) - \overset{\omega}{g}(X,Q(Z,Y)).$$

Отсюда следует (2).

С л е д с т в и е 3. Следующие утверждения эквивалентны:
1) связность $\overset{c}{\nabla}$ согласована с метрикой $\tilde{g}$;
2) $\bar{g}(Q(Z,X),Y) + \bar{g}(X,Q(Z,Y)) = 0$.

С л е д с т в и е 4. Если $\overset{F}{g} = \overset{\omega}{g}$, то связность $\overset{c}{\nabla}$ согласована с метрикой $\tilde{g}$.

Библиографический список

1. К о б а я с и Ш., Н о м и д з у К. Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т.2. 414 с.

2. Bourguignon J.P. Codazzi tensor fields and curvature operators // Lect. Notes. Math. 1981. V. 838. p. 249–250.

УДК 514.76

СВЯЗНОСТЬ В ПРОДОЛЖЕНИИ ГЛАВНОГО РАССЛОЕНИЯ

Ю.И.Ш е в ч е н к о

(Калининградский государственный университет)

Доказано, что связности главного расслоения и расслоения линейных реперов касательных пространств к базе главного расслоения имеют лифт в продолжении главного расслоения. Параллельно показано, что объекты кручения линейной связности и кривизны произвольной фундаментально-групповой связности в неголономном случае, вообще говоря, – не тензоры, а в голономном случае – тензоры.

1. Связность в главном расслоении. Рассмотрим главное расслоение $G_r(V_n)$ со структурными уравнениями Лаптева [1], [2, с.25]:

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, \qquad (1)$$

$$d\omega^\alpha = \tfrac{1}{2} C^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + \omega^i \wedge \omega^\alpha_i, \qquad (2)$$

где индексы принимают следующие значения:

$$i,j,k,\ell,p,q = \overline{1,n}; \qquad \alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon = \overline{n+1, n+r},$$

а $C^\alpha_{\beta\gamma}$ – структурные константы r-членной группы Ли G_r, удовлетворяющие условиям антисимметрии $C^\alpha_{(\beta\gamma)} = 0$ и тождествам Якоби

$$C^\alpha_{\beta\{\gamma} C^\beta_{\delta\varepsilon\}} = 0, \qquad (3)$$

причем круглые скобки обозначают симметрирование, а фигурные – циклирование. Базой главного расслоения $G_r(V_n)$ является n-мерное дифференцируемое многообразие V_n, имеющее структурные уравнения (1), а типовым слоем служит группа Ли G_r. Вполне интегрируемая система уравнений $\omega^i = 0$ фиксирует точку базы V_n, поэтому из уравнений (2) вытекают структурные уравнения для инвариантных форм $\bar{\omega}^\alpha = \omega^\alpha|_{\omega^i=0}$ группы Ли G_r:

$$d\bar{\omega}^\alpha = \tfrac{1}{2} C^\alpha_{\beta\gamma}\bar{\omega}^\beta \wedge \bar{\omega}^\gamma. \qquad (4)$$

Для задания связности в главном расслоении $G_r(V_n)$ по Лаптеву [1] введем формы $\tilde{\omega}^\alpha = \omega^\alpha - \Gamma^\alpha_i \omega^i$, где Γ^α_i – некоторые функции базисных и слоевых параметров. Внешние дифференциалы